

# Diagrammi di Bode



Università degli Studi Magna Græcia di Catanzaro  
II anno – I semestre CdL in Ingegneria Informatica e Biomedica  
Corso di Fondamenti di Automatica– Ing. C. Cosentino – A.A. 2006/07

# Funzione di Risposta Armonica

- Data la funzione di trasferimento  $W(s)$ , abbiamo visto come ricavare la funzione di risposta armonica  $W(j\omega)$
- Tale funzione permette di determinare immediatamente la risposta a regime ad un segnale sinusoidale di pulsazione  $\omega$
- Vogliamo ora tracciare l'andamento del modulo e della fase di  $W(j\omega)$  al variare di  $\omega$



# Definizione dei diagrammi

- Utilizzeremo due coppie di assi cartesiani, una per il diagr. del modulo e una per quello della fase
- In entrambi i diagrammi si riporta in ascissa la quantità  $\log_{10}\omega$ .
- Tale scelta è dovuta al fatto che i diagrammi possono essere tracciati su valori di diversi ordini di grandezza: la scala logaritmica permette di mantenere una uguale accuratezza di tracciamento a qualsiasi ordine di grandezza e di contenere il disegno in uno spazio ragionevole.



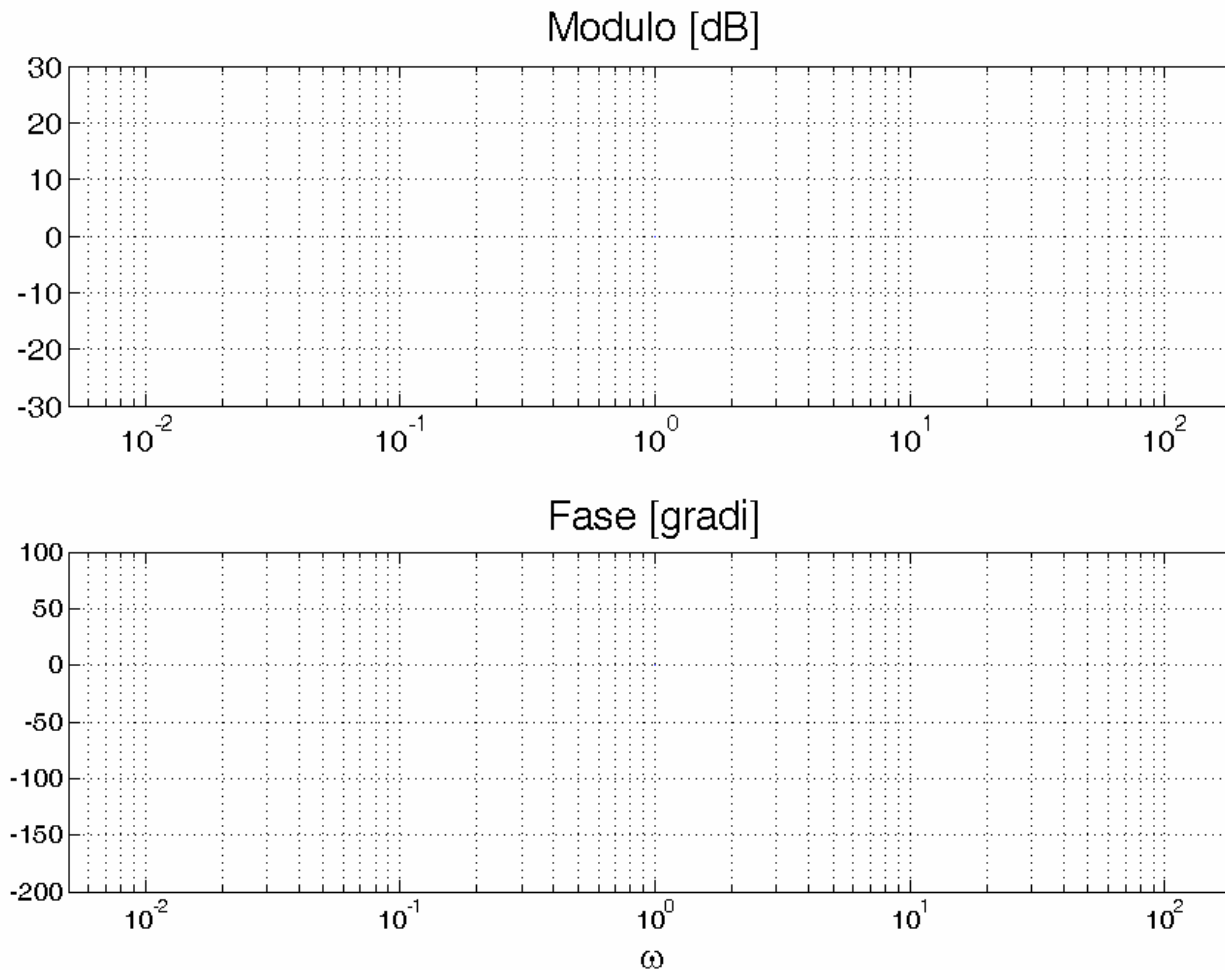
- Per quanto riguarda il valore in ordinata:
  - Il modulo viene riportato in dB (decibel), e si calcola dalla formula

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$

- La fase viene riportata in gradi
- Anche in questo caso la scelta della scala è collegata al range ammissibile di valori che può essere assunto dalle grandezze da tracciare



# Diagrammi Logaritmici



# Forma Generale della $W(j\omega)$

- La  $W(j\omega)$  può essere espressa genericamente nella seguente forma

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega} = K \frac{s^v \prod_i (1 + \sigma_i s) \prod_q \left( 1 + \frac{2\xi_q}{\omega_{nq}} s + \frac{s^2}{\omega_{nq}^2} \right)}{\prod_j (1 + \tau_j s) \prod_p \left( 1 + \frac{2\zeta_p}{\omega_{np}} s + \frac{s^2}{\omega_{np}^2} \right)} \Big|_{s=j\omega}$$

- Si noti che tale forma è composta da quattro fattori elementari
- Nel seguito, per comodità di notazione utilizzeremo la variabile  $s$ , sottointendendo che i diagrammi si riferiscono alla rispettiva trasformata di Fourier



# Fattori Elementari

- Costante:  $K$
- Zero/Polo nell'origine di molteplicità  $v$ :  $s^v$
- Fattore binomio:  $(1 + \tau s)^{\pm 1} \rightarrow$  zero/polo semplice in  $-1/\tau$
- Fattore trinomio:

$$\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$

$\rightarrow$  zero/polo doppio in  $\omega$ , con coeff. di smorzamento  $\zeta$

- N.B. se  $|\zeta| \geq 1$  il fattore trinomio va espresso come prodotto di due fattori binomio, poiché le radici sono reali



- Ricordiamo alcune proprietà del logaritmo:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

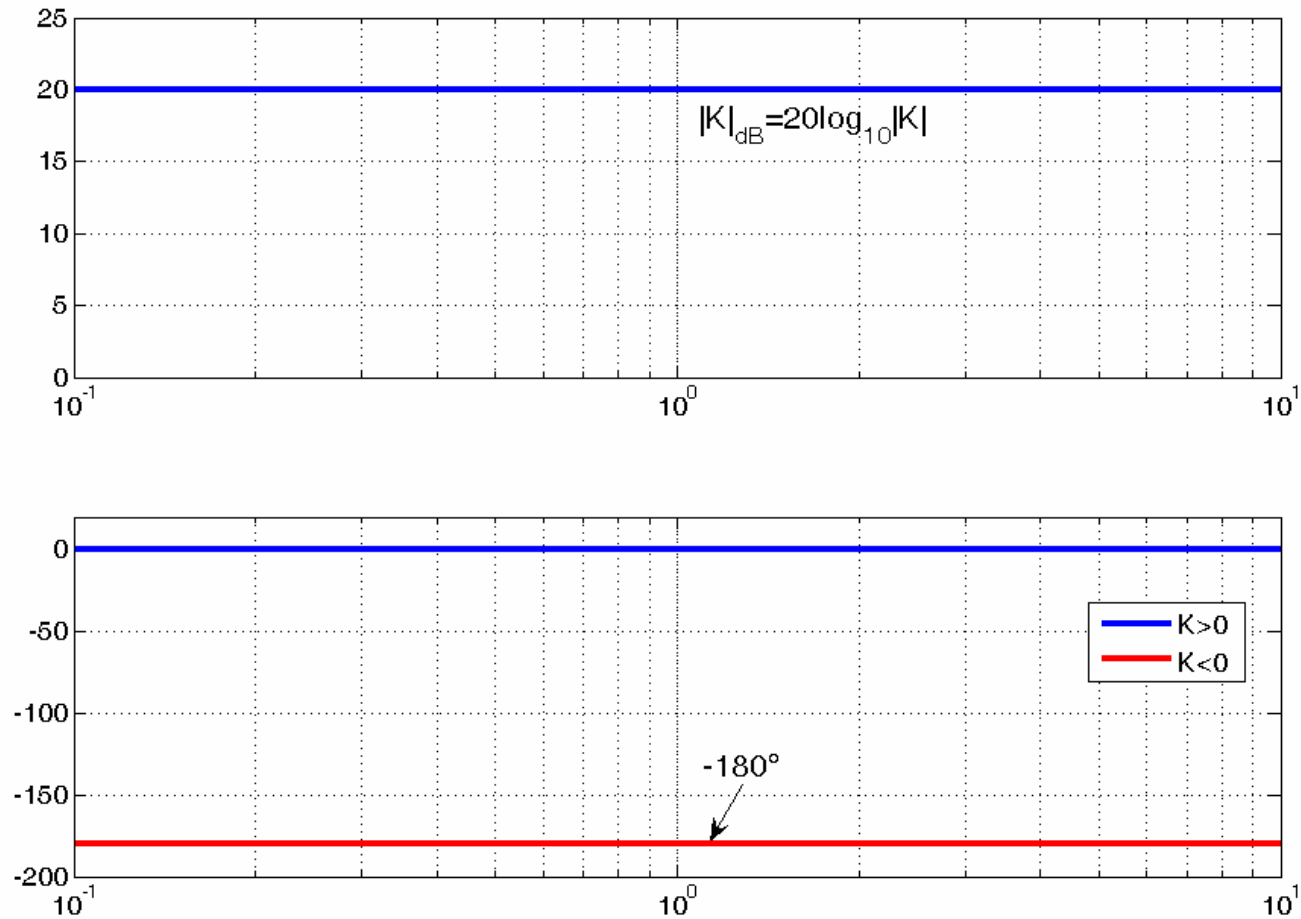
$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^n) = n \log(x)$$

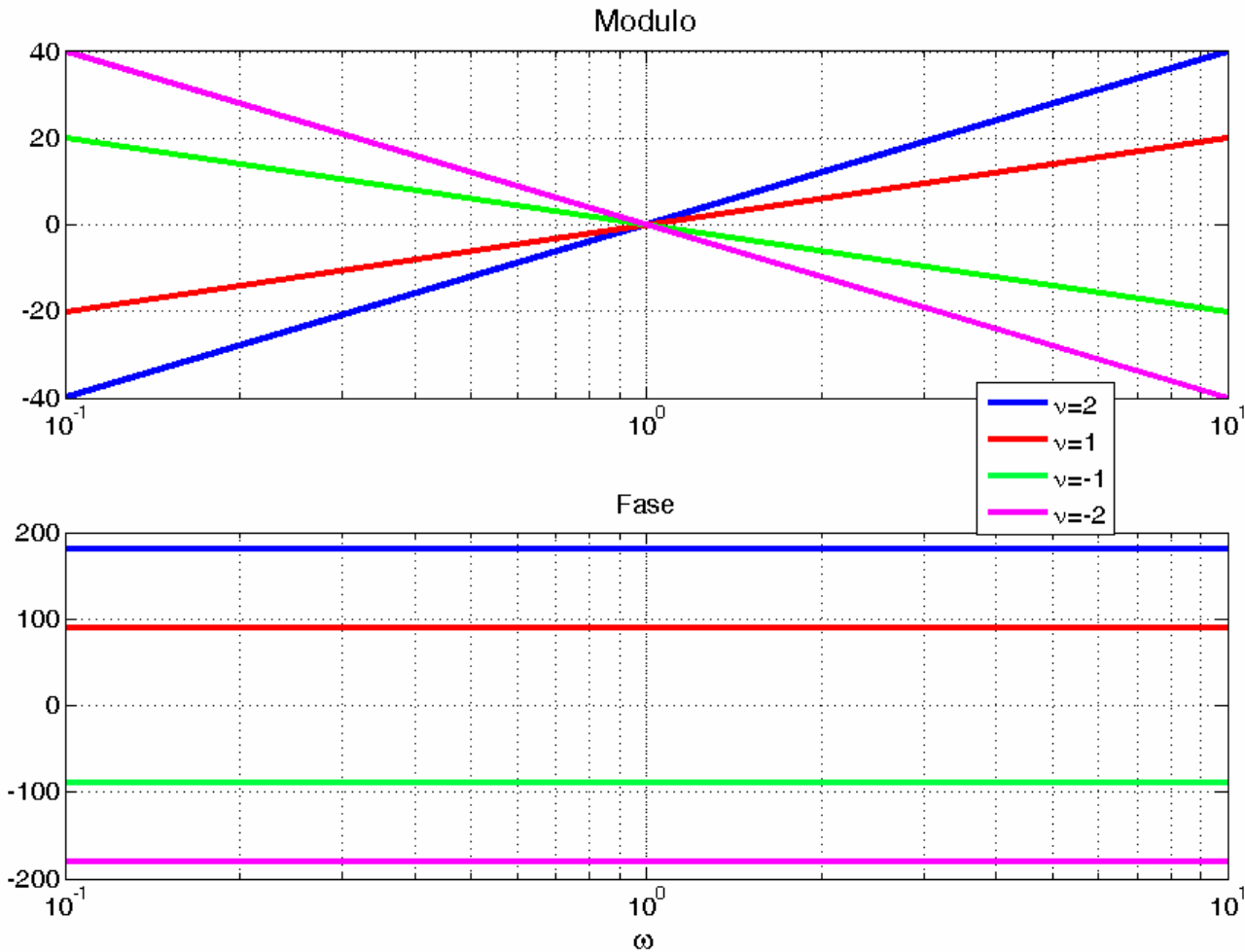
- Dunque, i diagrammi di  $W(j\omega)$  si possono facilmente ottenere (per somma e sottrazione) da quelli di ciascun fattore elementare



# Costante: $K$



# Polo/Zero nell'Origine: $(j\omega)^\nu$

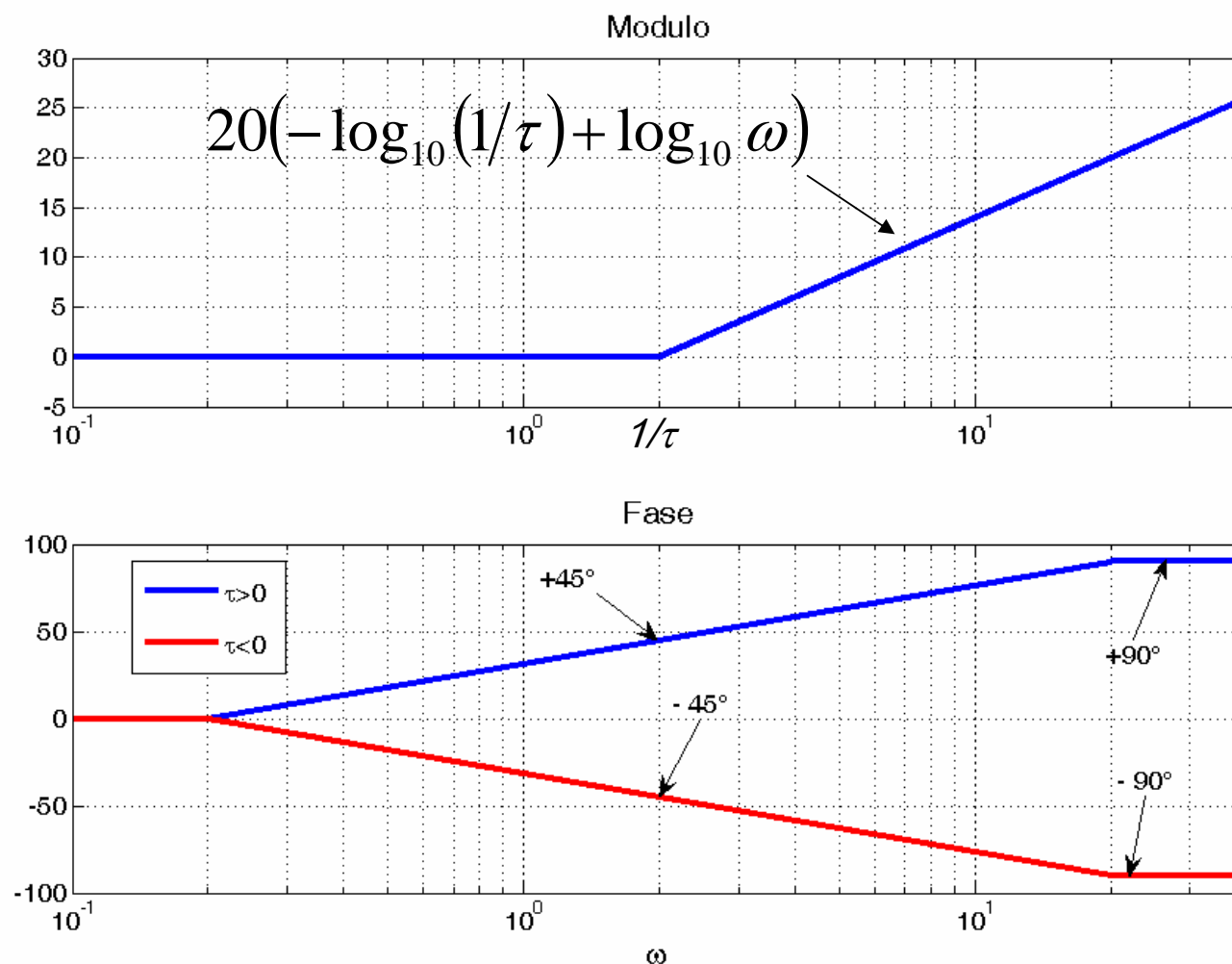


# Diagrammi Asintotici

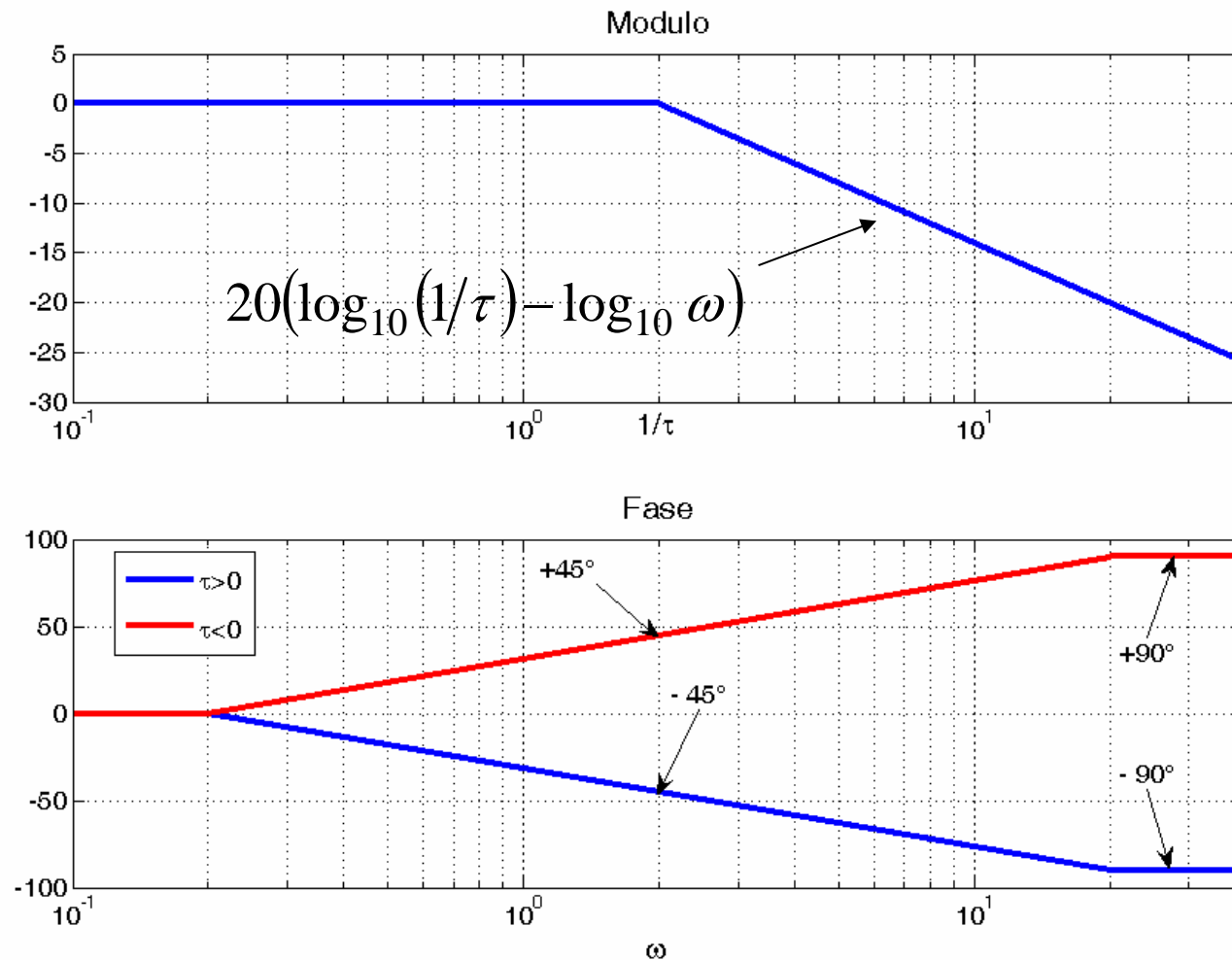
- Calcolando il modulo e la fase dei termini binomio e trinomio si ottiene un'espressione complessa
- Per tracciare il diagramma in modo rapido, si valutano gli asintoti di tale espressione, per  $\omega \rightarrow 0$  e per  $\omega \rightarrow \infty$
- Si procede quindi al tracciamento dei diagrammi asintotici
- Gli asintoti (orizzontali) del diagr. della fase vengono raccordati con un segmento che parte una decade prima e finisce una decade dopo del punto di rottura



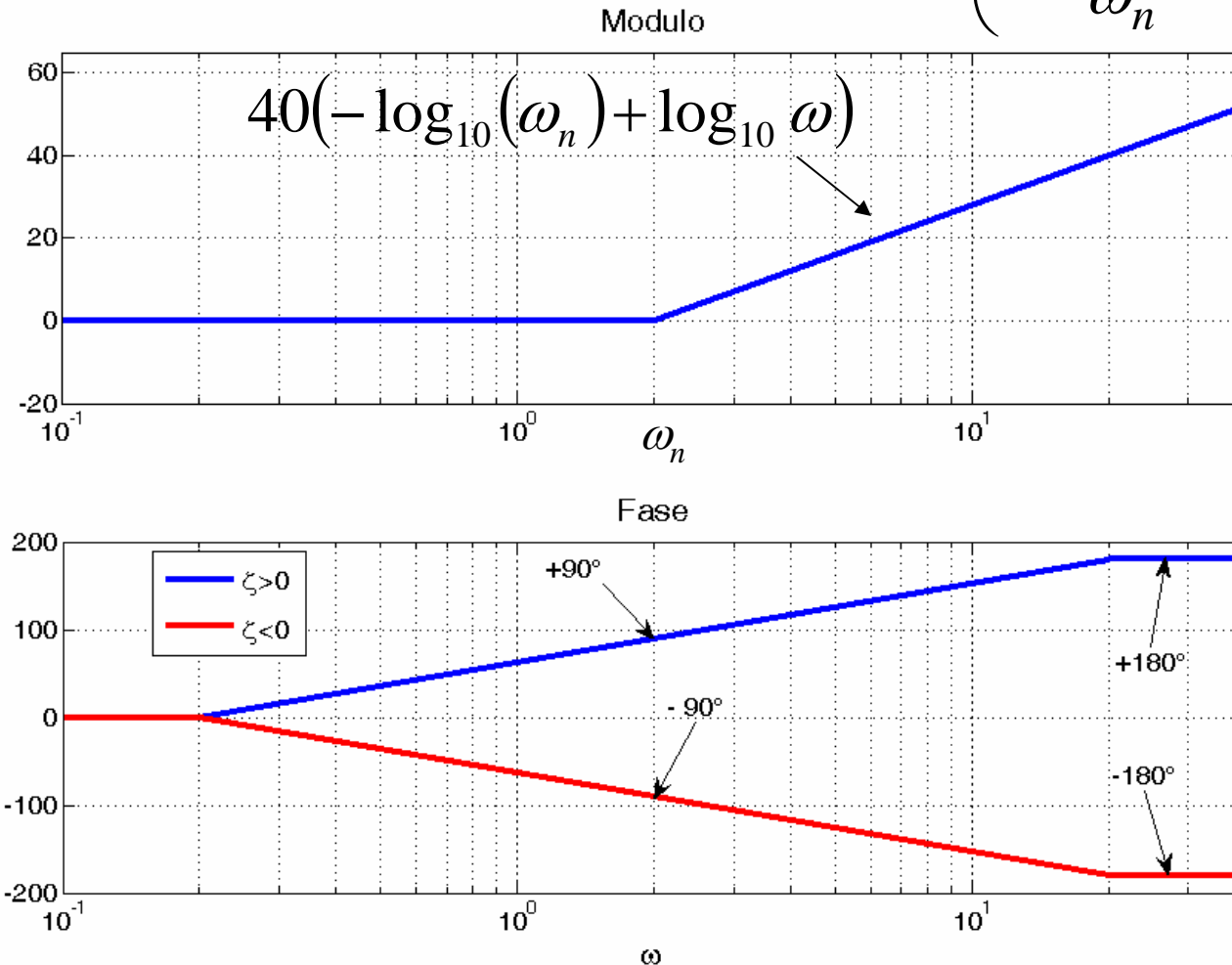
# Diagr. Asintotici Zero Semplice: $(1 + \tau j\omega)$



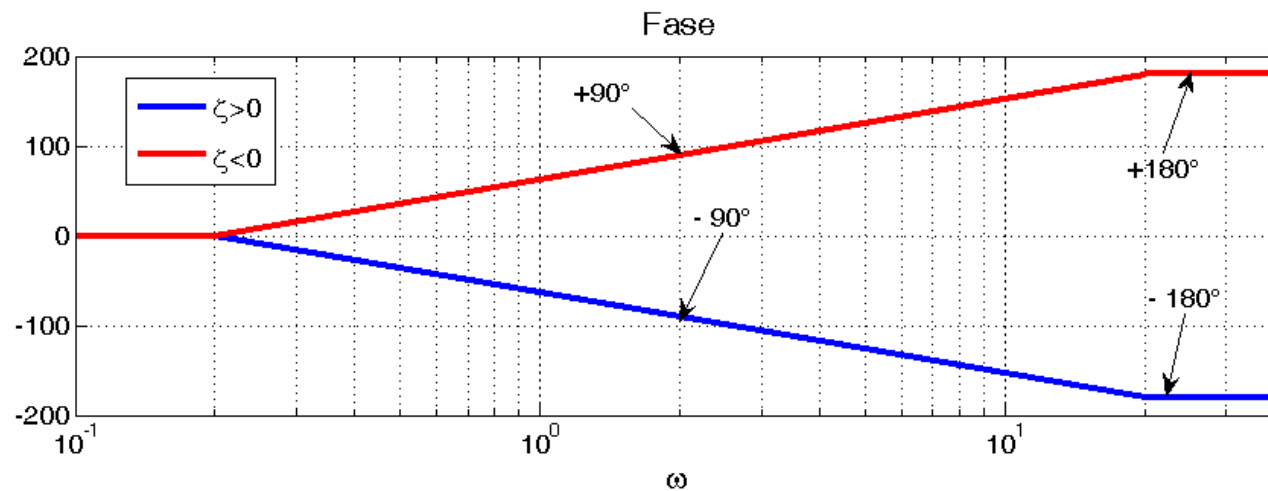
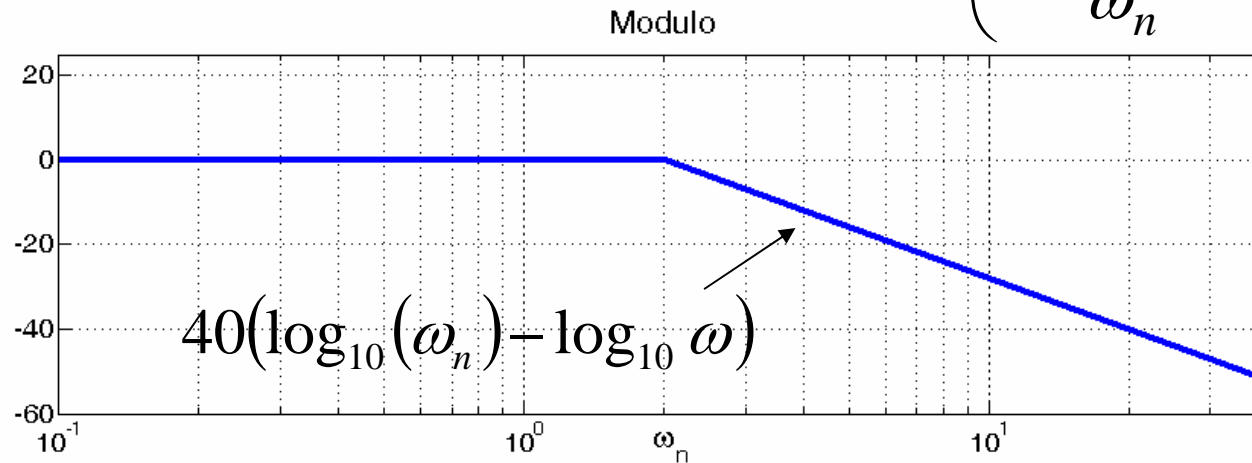
# Diagr. Asintotici Polo Semplice: $(1 + \tau j\omega)^{-1}$



# Diagr. Asintotici Zeri Complessi: $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)$



# Diagr. Asintotici Poli Complessi: $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega\right)^{-1}$



# Esempio

- Calcoliamo il diagramma complessivo della f.d.t.

$$W(s) = \frac{10(s+5)}{(s+1)(s+10)}$$

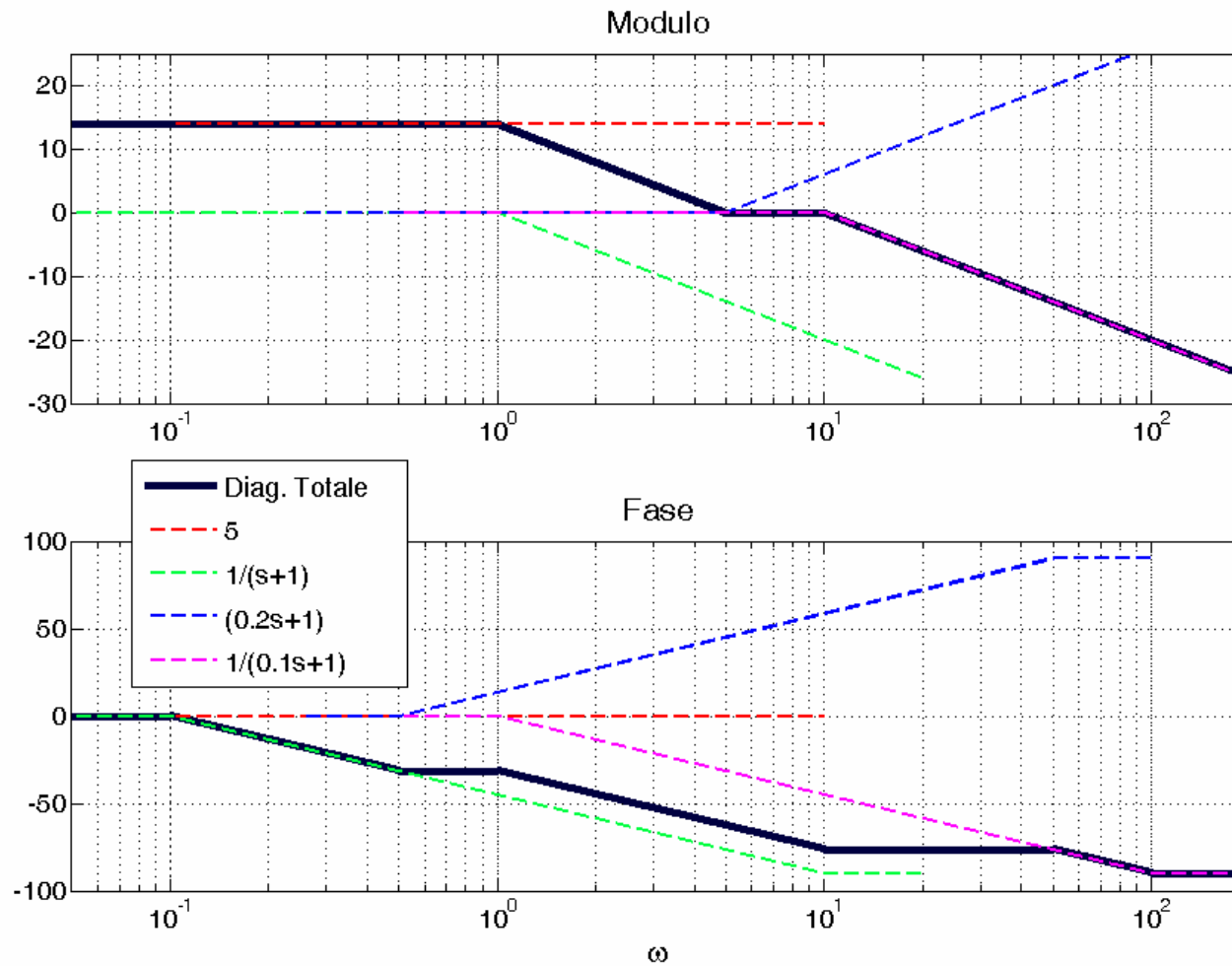
- Poniamo la f.d.t. nella forma generale

$$W(j\omega) = 5 \frac{(1+j0.2\omega)}{(1+j\omega)(1+j0.1\omega)}$$

- Quindi, sommiamo i diagr. dei fattori  $5$ ,  $(1+0.2j\omega)$ , e sottraiamo quelli di  $(1+j\omega)$ ,  $(1+0.1j\omega)$



# Esempio

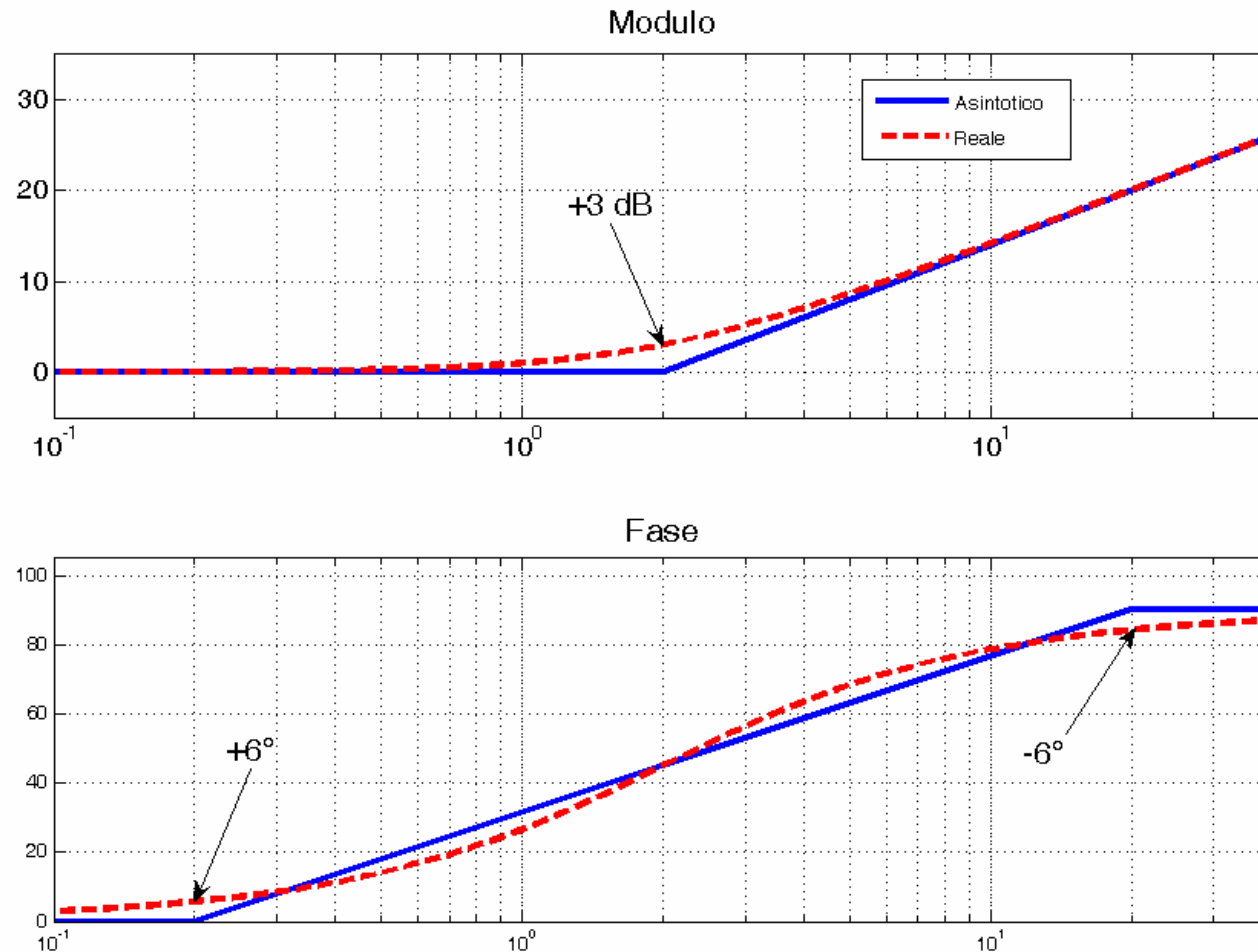


# Diagrammi Reali

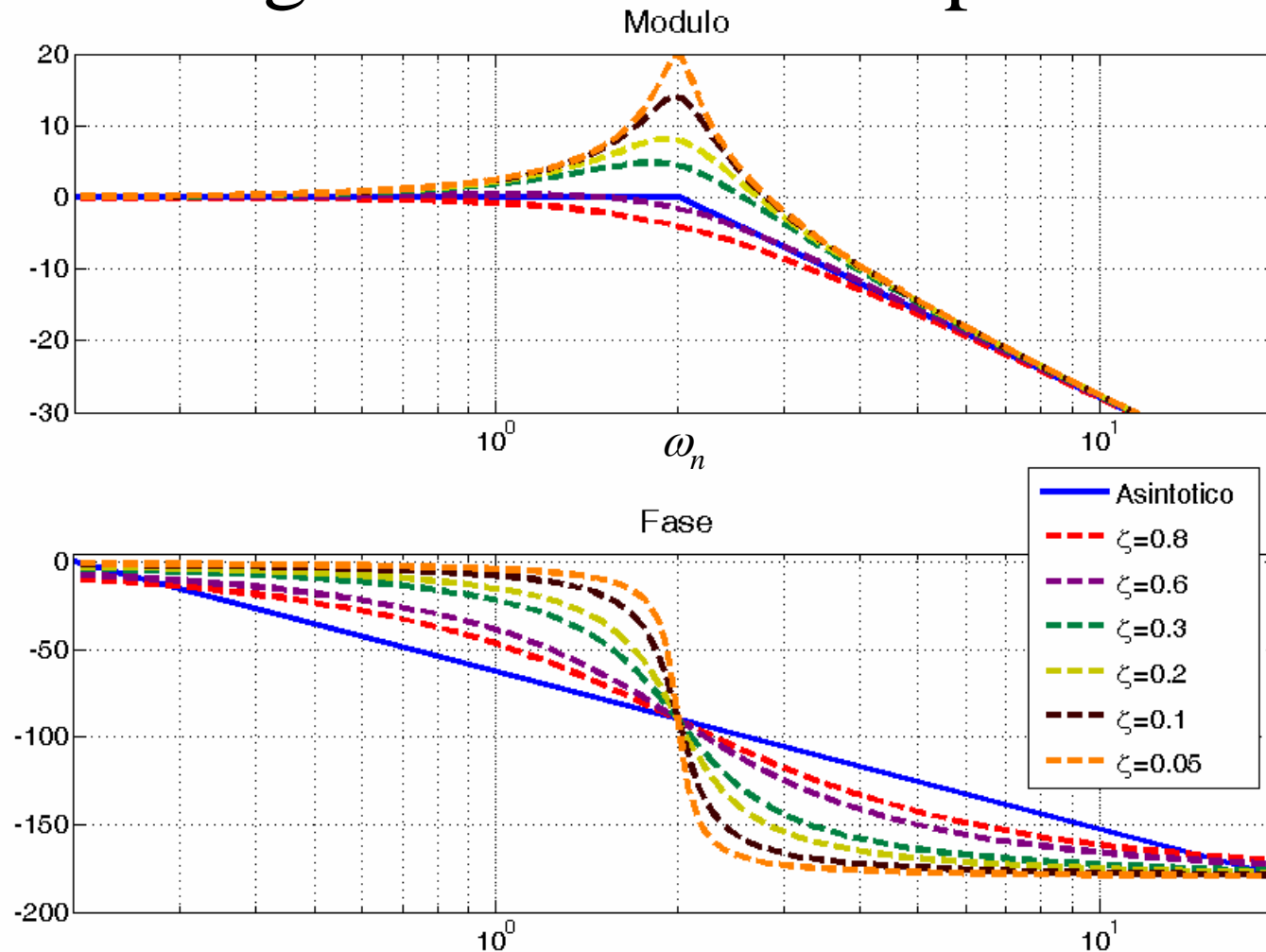
- Il tracciamento dei diagrammi reali può essere effettuato calcolando modulo e fase in maniera puntuale
- Ciò può essere fatto agevolmente mediante calcolatore, ad es. in Matlab si può utilizzare il comando *bode*
- Nel tracciamento manuale, si può migliorare il diagramma effettuando delle correzioni in alcuni punti opportuni



# Diagr. Reali Zero Semplice



# Diagr. Reali Poli Complessi



# Esempi

- Tracciare i diagrammi di Bode per le seguenti fdt

$$W_S = \frac{1000(s + 0.5)}{s(s^2 + 10s + 100)}$$

$$W_S = \frac{s(s - 2)}{(s^2 + 5s + 25)}$$



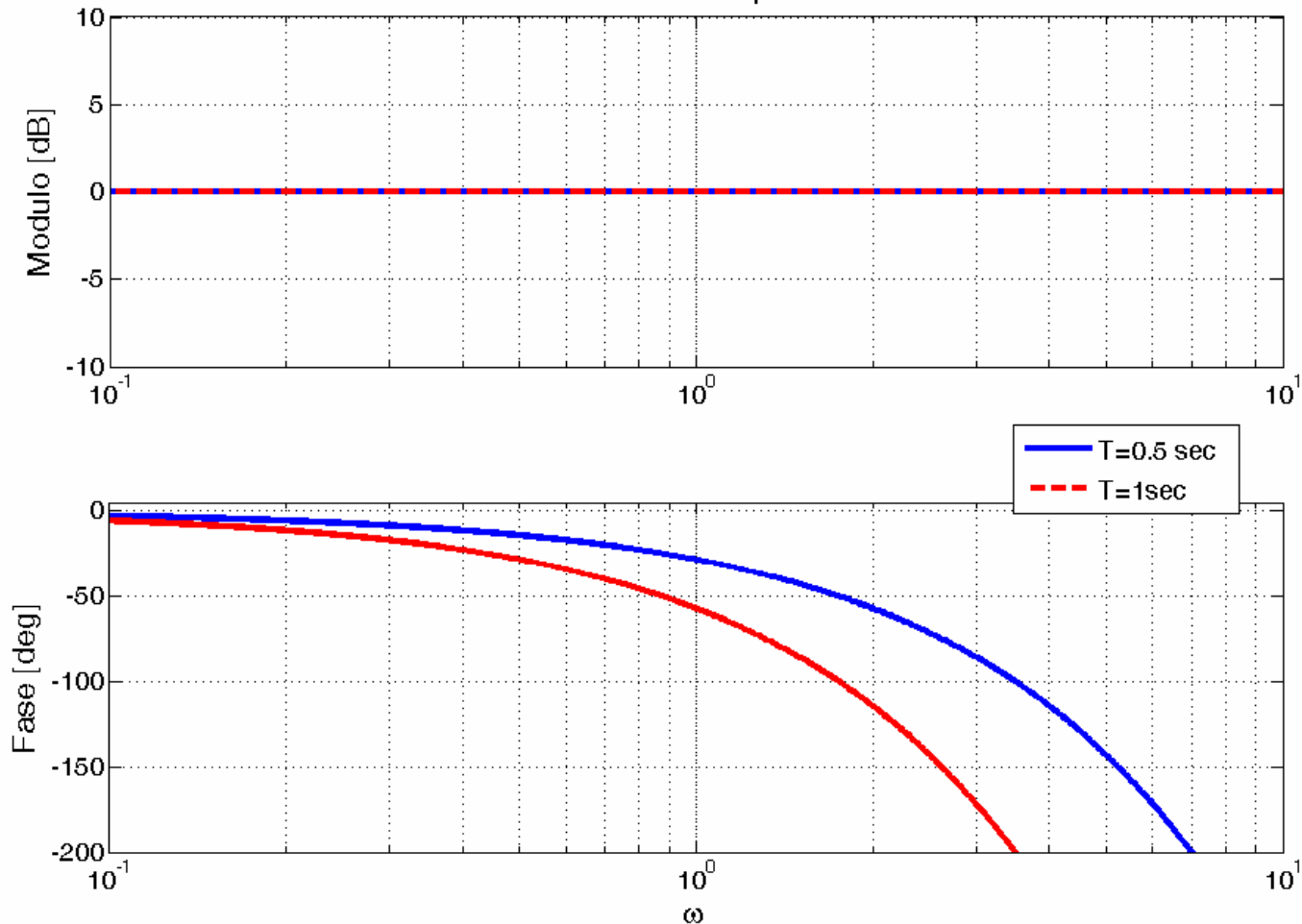
# Ritardo di Tempo

- La fdt del ritardo di tempo  $T$  è  $W(s) = e^{-Ts}$
- Sostituendo  $s=j\omega$  otteniamo  $W(j\omega) = e^{-Tj\omega}$
- Il modulo è unitario per ogni  $\omega$ , mentre la fase è pari a  $-\omega T$



# Diagr. del Ritardo di Tempo

Ritardo di tempo:  $e^{-Ts}$



# Sistemi a Sfasamento Minimo

- Data una coppia di diagrammi di Bode di modulo e fase, non è possibile determinare univocamente la fdt corrispondente
- Abbiamo infatti visto che uno stesso sfasamento può essere dato da un polo a parte reale negativa e da uno zero a parte reale positiva (e viceversa)
- Alla luce di queste osservazioni, è importante definire la classe dei sistemi a sfasamento minimo



# Sistemi a Sfasamento Minimo

- Un sistema si dice a sfasamento minimo se la sua fdt soddisfa le seguenti condizioni
  - Guadagno positivo
  - Poli e zeri hanno tutti parte reale negativa o nulla
  - Non sono presenti ritardi di tempo
- Sotto queste ipotesi, esiste una corrispondenza biunivoca tra il diagramma dei moduli e quello delle fasi
- Tale corrispondenza è espressa dalla formula di Bode

$$\arg(j\bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}}{10\pi \log e} \int_0^{\infty} \frac{|G(j\omega)|_{dB} - |G(j\bar{\omega})|_{dB}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} d\omega$$

